

Die philosophische Bedeutung des Gödel-Universums

In seiner Zeit am *Institute of Advanced Studies* wurde Kurt Gödel ein enger Freund von Albert Einstein und hat sich insbesondere mit der Relativitätstheorie beschäftigt. Ein Ergebnis dieser Untersuchung war die Entdeckung des sogenannten *Gödel-Universums*¹, einem Modell der Einsteinschen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, in dem sich keine absolute Zeit definieren läßt – theoretisch wären in einem solchen Universum Zeitreisen möglich.

Diesem Ergebnis werden z.T. weitreichende philosophische Konsequenzen zugeschrieben. Palle Yourgrau argumentiert etwa, daß Gödel geschlossen habe, daß es selbst in unserer Welt keine Zeit gäbe.² Tatsächlich finden sich in Gödels Schriften nur sehr viel vorsichtigere Konklusionen. In dieser Arbeit wollen wir zuerst die „Entdeckung“ des Gödelschen Universums im Kontext seiner Arbeit als Logiker rekonstruieren. Auf der Grundlage dieser Rekonstruktion läßt sich anschließend die spezifisch philosophische Herausforderung erkennen, die Gödel gesehen hat: Unsere kosmologischen Theorien sollten mit Hilfe *physikalischer* Prinzipien zu verstärken sein, so daß die Nichtexistenz von Gödel-Universen – und damit die Existenz der Zeit – nicht „von der besonderen Weise abhängt, in der die Materie und ihre Bewegung in der Welt angeordnet sind.“³

Gödel als Logiker

Das herausragende Resultat von Kurt Gödel in der Liste seiner wissenschaftlichen Leistungen sind ohne Zweifel die Unvollständigkeitssätze [Gö31]. Davor hatte er schon die (semantische) Vollständigkeit der vorliegenden Axiomatisierung der Prädikatenlogik gezeigt [Gö30], und für die technische Etablierung seiner Unvollständigkeitssätze die rekursiven Funktionen eingeführt. Anschließend gelang ihm der Beweis der Verträglichkeit des Auswahlaxioms und der Kontinuumshypothese mit der Axiomatisierung der Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel [Gö38]. Dazu gesellen sich viele „kleinere“ Resultate, wie eine Form der Doppelnegationsinterpretation für die Peano-Arithmetik in der Heyting-Arithmetik [Gö33] oder die Definition seines System von Funktionalen höheren Types \mathcal{T} , das einen nicht-finiten Widerspruchsfreiheitsbeweis der Arithmetik erlaubt [Gö58]. Alle diese Arbeiten sind der mathematischen Logik zuzurechnen,

¹Genau genommen handelt es sich um eine ganze Klasse von Universen; die Singularform steht hier als Kollektivum.

²„Können wir wirklich daraus, dass die Zeit in einem nur möglichen Universum nicht existiert, ableiten, dass sie auch in unserer Welt nicht existiert? Kurz gesagt, ja, das können wir! So zumindest argumentiert Gödel.“ [You05, S. 135].

³Vergleiche [Gö56, S. 412].

einer Disziplin die nicht zuletzt durch Gödels Beiträge ihre moderne Ausgestaltung erfahren hat.

Es ist bekannt, daß Einstein gegen Ende seines Lebens gesagt hat, er gehe nur noch zum Institut in Princeton, um mit Gödel zu diskutieren.⁴ Gegenstand der Gespräche wird sicherlicher auch die Relativitätstheorie gewesen sein und insbesondere Gödels berühmtes Universum, das unseren Zeitbegriff in Frage zu stellen scheint. In der folgenden Reflexion der philosophischen Konsequenzen, die Gödel aus der Entdeckung seines Universums zog, ist es aber wichtig, sich vor Augen zu halten, daß auch diese Entdeckung vor dem Hintergrund der *logischen* Kompetenz von Gödel betrachtet werden sollte.

Einsteins Relativitätstheorie

Albert Einstein hatte zuerst die heute sogenannte *spezielle* Relativitätstheorie aufgestellt [Ein05]. Zwar war Einstein selbst kein Logiker. Aber wir können die spezielle Relativitätstheorie durchaus mit Hilfe gewisser logischer Vorgaben gewinnen.

Die zentrale Idee dabei ist: Man kann die Erkenntnis, daß es eine absolute Lichtgeschwindigkeit c gibt, die zugleich die physikalisch höchste Geschwindigkeit darstellt, als eine Art *Axiom* aufstellen, so daß alle weiteren Theoriebestandteile einer physikalischen Beschreibung unseres Universums mit diesem Axiom verträglich sein müssen.

Dies läßt an der Addition von Geschwindigkeiten veranschaulichen. Nach der klassischen Physik lassen sich Geschwindigkeiten beliebig addieren. Sei dafür etwa ein Zug mit der Geschwindigkeit u unterwegs. Wenn eine Person in dem Zug mit Geschwindigkeit v nach vorne geht, beträgt die von außen betrachtete Geschwindigkeit $u+v$. Jetzt halte ein Passagier eine Taschenlampe in Fahrtrichtung. Das Licht dieser Taschenlampe würde sich dann, von außerhalb des Zuges betrachtet, nach klassischer Auffassung mit der Geschwindigkeit $u+c$ fortbewegen, was aber größer als c wäre. Wenn c aber eine absolute Höchstgeschwindigkeit sein soll, muß die Addition in gewisser Weise anders berechnet werden. Es bedarf jetzt aufwendiger mathematischer Überlegungen,⁵ um mit Einstein auf die „richtige“ Additionsformel zu kommen:

$$\frac{u+v}{1+\frac{u\cdot v}{c^2}}$$

⁴Oskar Morgenstern in einem Brief an Bruno Kriesky, den österreichischen Bundesminister für Auswärtige Angelegenheiten, vom 25. Okt. 1965, [Mor02]:

Einstein hat mir öfters gesagt, daß er in den letzten Jahren seines Lebens immer wieder Gödels Gesellschaft gesucht hat, um mit ihm diskutieren zu können. Einmal sagte er zu mir, daß seine eigene Arbeit nicht mehr viel bedeute, daß er lediglich ins Institutsgebäude käme, „um das Privileg zu haben, mit Gödel zu Fuß nach Hause gehen zu dürfen.“

⁵Man beachte dazu Minkowskis Erstaunen über Einsteins mathematische Leistungen, das von Max Born überliefert wurde:

Ach der Einstein, der schwänzte immer die Vorlesungen – dem hätte ich das gar nicht zugetraut.

Von Constance Reid stammt das nur auf englisch erhaltene Zitat [Rei70, S. 112]:

Einstein's presentation of his deep theory is mathematically awkward — I can say that because he got his mathematical education in Zürich from me.

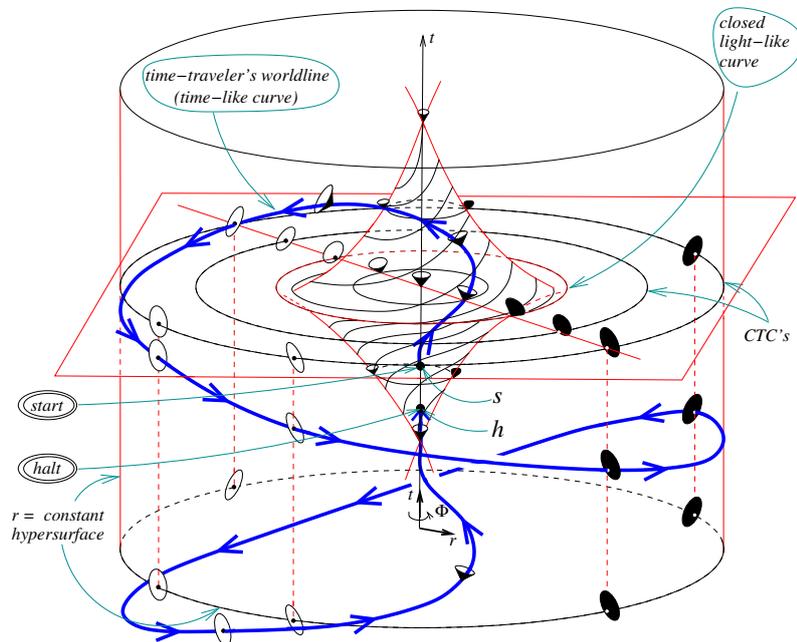


Abbildung 1: Graphische Illustration eines Gödel-Universums mit eingezeichneter „Zeitreise“, entnommen aus [NMAA10].

In einer vereinfachten Beschreibung kommt man von der speziellen Relativitätstheorie zur allgemeinen Relativitätstheorie [Ein16], wenn man noch das weitergehende „Axiom“ berücksichtigt, daß es *kein ausgezeichnetes Bezugssystem gibt*. Dazu muß man die Theorie mit noch weit schwierigerem mathematischem Rüstzeug so umarbeiten, daß auch dieses Axiom in allen Folgerungen respektiert wird.

Durch eine logische Brille betrachtet könnte man sagen, daß Einstein sowohl die spezielle als auch die allgemeine Relativitätstheorie dadurch entwickelt hat, daß er neue *Axiome* „zu Ende gedacht hat“: Er hat die bestehenden Theorien soweit umgearbeitet, daß sie mit diesen Axiomen in Einklang stehen. Damit soll natürlich kein Anspruch auf eine adäquate Wiedergabe von Einsteins historischem Vorgehen verbunden sein. Es geht nur darum, den spezifischen Status der neuen Annahmen herauszustellen, durch den man letztlich eine mathematische Theorie erhält. Und seit Hilbert lassen sich solche mathematischen Theorien auch immer axiomatisch fassen [Hil18].

Das Gödel-Universum

Gödel konnte für die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie zeigen, daß es ein Modell gibt [Gö49a], in dem – theoretisch – Zeitreisen möglich sind (siehe Abbildung 1).

Auch wenn zum Nachweis der Existenz dieses Universums umfangreiche und

komplizierte mathematische Rechnungen nötig waren, ist die qualitative Konzeption eine rein logische: Die axiomatische Fassung der Relativitätstheorie in ihren Feldgleichungen läßt *Nicht-Standard-Modelle* zu; d.h. insbesondere, daß sie formal unvollständig ist.

Man könnte Einsteins Vorgehen dahingehend charakterisieren, daß er untersucht hat, was aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit *folgt*. Gödel hat dann seinerseits untersucht, was mit dem Ergebnis der Einsteinschen Untersuchungen *verträglich ist*.

Die dabei entdeckte Unvollständigkeit hat keine spezifische Beziehung zur Unvollständigkeit arithmetischer Theorien, die Gödel in seinem ersten Unvollständigkeitssatz gezeigt hatte. Dieser wurde syntaktisch gewonnen und hat einen generischen Charakter, d.h. er überträgt sich auf (rekursive) Erweiterungen der gegebenen Theorie. Hier haben wir es eher mit dem Phänomen zu tun, das aus der absoluten Geometrie (d.i. die euklidische Geometrie ohne das Parallelenaxiom) bekannt ist. Diese ist unvollständig, eben weil sich das Parallelenaxiom weder beweisen noch widerlegen läßt, und das wurde modelltheoretisch, d.h. durch die Konstruktion der nicht-euklidischen Geometrien, gezeigt. Entsprechend ist der salopp formulierte Satz: „Es gibt keine Zeitreisen.“ durch die Angabe des Gödel-Universums als unabhängig von der Relativitätstheorie erwiesen worden.

Sind Zeitreisen möglich?

Die Frage, ob mit der Entdeckung des Gödel-Universums Zeitreisen möglich seien, ist für sich genommen schlecht gestellt. Der modale Begriff der Möglichkeit erfordert zuerst eine Festlegung des „Möglichkeitstraums“, d.h. derjenigen Eigenschaften und Sachverhalte, die zu verändern erlaubt sein soll. Diese Frage wird uns im nächsten Abschnitt beschäftigen.

Doch auch ohne Festlegung des Möglichkeitsraumes konnte Gödel die gestellte Frage bereits verneinen. Er verweist auf den Zeit- und Energiebedarf für eine in seinem Universum eben nur theoretisch mögliche Zeitreise; praktisch wäre das Raumzeitschiff zu schwer und eine Reise, bei der man sich selbst in der eigenen Vergangenheit besuchen könnte, würde viel zu lange dauern (beziehungsweise eine Geschwindigkeit erfordern, die dem menschlichen Körper kaum zuzumuten wäre).

Gödels Hauptargument gegen Zeitreisen ist allerdings ein anderes: Auch wenn in „seinem Universum“ Zeitreisen möglich sein sollten, heißt das natürlich noch nicht, daß „unser Universum“, d.h. das in dem wir leben – und in dem auch Gödel lebte – ein solches Universum ist. Die Theorie läßt natürlich auch zu, daß es genau so ist, wie wir und Einstein uns das „eigentlich“ vorgestellt haben. Das Gödel-Universum besitzt eine Raum(zeit)krümmung, die meßbar wäre. In unserem Universum läßt sich die entsprechende Rotverschiebung aber nicht nachweisen. Demnach leben wir also doch – glücklicherweise – in einem „Standarduniversum“, in dem auch der Zeitbegriff nicht kollabiert.

Die philosophische Herausforderung: Physikalische Prinzipien, die das Gödel- Universum ausschließen

Die eigentlich philosophische Herausforderung liegt für Gödel in dem folgenden Dilemma: Es mag zwar richtig sein, daß „unser Universum“ keine Zeitreisen zuläßt, aber der Umstand, daß *die physikalischen Rahmenbedingungen* andere Universen zulassen, in denen es keinen sinnvollen Zeitbegriff gibt, ist philosophisch mehr als unbefriedigend. Tatsächlich würde dann die Existenz der Zeit nur „von der besonderen Weise abhäng[en], in der die Materie und ihre Bewegung in der Welt angeordnet sind“ [Gö56, S. 412]. Das sind aber *kontingente Eigenschaften* unserer Welt, die sich nicht schon notwendig aus den physikalischen Rahmenbedingungen ergeben.

Wenn wir also die oben aufgeworfene Frage nach dem Möglichkeitsraum aufgreifen, sind für Gödel die in der von Einstein aufgestellten allgemeinen Relativitätstheorie inkorporierten physikalischen Prinzipien – die sich nicht zuletzt in den Feldgleichungen äußern – als notwendige Randbedingungen fest gegeben. Diese lassen aber Modelle (im logischen Sinne) zu, in denen es „keinen objektiven Zeitverlauf geben kann“⁶. Wenn sich diese Modelle nur durch kontingente Eigenschaften – nämlich die Materieverteilung und ihre Bewegung – ausschließen lassen, kann das aus philosophischer Sicht „kaum als befriedigend betrachtet werden“⁷.

Die Aufgabe, die Gödel hier sieht, besteht also gerade darin, weitere *physikalische* Prinzipien zu finden, aus denen die Nichtexistenz seines Universums bereits folgen würde, ohne daß man kontingente Eigenschaften unseres Universums heranziehen müßte.⁸

Wir müssen dabei zugeben, daß es nicht von vornherein festgelegt ist, was als physikalisches Prinzip gelten sollte.⁹ Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit als auch das Fehlen eines ausgezeichneten Bezugssystems sind sicherlich solche Prinzipien; die Materieverteilung und ihre Bewegung in einem konkreten Universum dagegen nicht. Eine banale Lösung wäre, die Existenz eines objektiven Zeitverlaufs als Prinzip an den Anfang zu stellen. Eine solche *Petitio Principii* kann natürlich nicht befriedigen. Dennoch wurde genau dies von Stephen Hawking mit seiner „Chronology Protection Conjecture“ versucht [Haw92], aber eben nur als Vermutung und nicht als Axiom. Damit muß man Hawking zugehalten, daß diese Vermutung erst noch durch *andere* Prinzipien zu erweisen

⁶[Gö56, S. 412].

⁷[Gö56, S. 412].

⁸Mit dieser Bewertung stehen wir im Gegensatz zu Yourgrau, der schreibt: „Zunächst bemerkt er, daß bei einem Versuch, die obige Definition der ‚kosmischen‘ oder ‚absoluten‘ Zeit zu präzisieren, willkürliche Elemente ins Spiel kommen, welche *niemals* vollkommen beseitigt werden können“ [You02, S. 276, unsere Hervorhebung]. Dabei wird bezug genommen auf die Fußnote 9 in [Gö49b]. Dort wendet sich Gödel aber lediglich gegen eine *precise definition* der absoluten Zeit im Sinne Jeans’, und statt „niemals“ spricht Gödel vorsichtig von „perhaps“, auch wenn er anschließend die Existenz einer solchen präzisen Definition für „doubtful“ hält. Unabhängig von einer präzisen Definition der absoluten Zeit, die Jeans im Sinn gehabt haben mag, kann man Gödel sicher nicht unterstellen, daß alle Formen einer physikalischen Vervollständigung der Relativitätstheorie nur durch willkürliche Elemente erfolgen könnten. Das folgt allein schon aus seinen eigenen Versuchen, die im folgenden kurz angesprochen werden.

⁹Gödel sagt das explizit am Ende des in Fußnote 12 gegebenen Zitats.

ist.¹⁰

Bis heute gibt es allerdings noch keine befriedigende Antwort auf die Frage nach solchen anderen physikalischen Prinzipien, die das Gödel-Universum ausschließen. Gödel selbst hat z.B. den *Entropiesatz* als möglichen Kandidaten ins Auge gefaßt. Er hat aber selbst festgestellt, daß dieser auch mit seinem Universum verträglich ist [Gö56, S. 411].¹¹

Ein besonders interessantes Schlaglicht hat Gödel auch auf die angesprochene Frage nach der Unterscheidung von physikalischen Prinzipien und kontingenten Eigenschaften geworfen.¹²

Was früher in der Mikrophysik eine praktische Schwierigkeit war, ist heute, infolge der Unbestimmtheitsrelation, eine prinzipielle Unmöglichkeit geworden; und dasselbe könnte eines Tages auch für die Schwierigkeiten eintreten, die nicht auf einem „zu klein“, sondern auf einem „zu groß“ beruhen.

Wenn also die Quantenmechanik die (mittlerweile) bekannten Gesetze der Relativitätstheorie im (zu) Kleinen außer Kraft setzt, spekuliert Gödel hier über die Möglichkeit einer „kosmologischen Physik“ die ihrerseits die bekannten Gesetze im (zu) Großen revidieren würde.¹³ Diese Idee ist nach unserer Kenntnis aber bis heute nicht weiter verfolgt worden.

Abschließend wollen wir noch hervorheben, daß Gödel die philosophische Spekulation über die Existenz der Zeit in einem spezifischen Kontext vollzieht, nämlich in dem der von ihm so bezeichneten *idealistischen Philosophie*.¹⁴ Darauf wird prominent im Titel der Arbeit [Gö56] Bezug genommen, und es heißt im Hinblick auf die Probleme, denen das Wesen der Zeit durch die Relativitätstheorie ausgesetzt ist: „Es scheint [...], daß man einen eindeutigen Beweis für die Ansicht jener Philosophen erhält, die, wie Parmenides, Kant und die modernen Idealisten, die Objektivität des Wechsels leugnen und diesen als eine Illusion oder als eine Erscheinung betrachten, die wir unserer besonderen Art der Wahrnehmung verdanken.“ Bei genauer Betrachtung der Argumentation Gödels in diesem Artikel kann man feststellen, daß er nicht vorrangig den (nur scheinbaren?) „eindeutigen Beweis“ unterstützt, sondern lediglich dagegen argumentiert, daß ein solcher Beweis schon dadurch zu Fall gebracht werden

¹⁰Aus dieser Perspektive ist die harsche Kritik Yourgraus an Hawking [You05, S. 15 und 160] gleichermaßen unverständlich wie auch ungerechtfertigt.

¹¹Diese Bemerkung findet sich als „Zusatz des Autors bei der deutschen Übersetzung zu Fußnote 14“ nur in der deutschen Ausgabe des Artikels.

¹²Dies findet sich wieder in einem „Zusatz des Autors zu Fußnote 11 der deutschen Auflage“, der wie folgt eingeleitet wird [Gö56, S. 411]:

Ein zweiter Grund, die obigen Universen *a priori* auszuschließen, könnte in der Möglichkeit eines „Telegraphierens in die eigene Vergangenheit“ gefunden werden. Doch dürften die dabei auftretenden praktischen Schwierigkeiten kaum geringer sein [als bei den zuvor diskutierten Zeitreisen]. Die Grenze zwischen praktischen und prinzipiellen Schwierigkeiten ist übrigens durchaus nicht unverrückbar.

¹³Hier darf man sich durchaus an die Aristotelische Unterscheidung von sublunarer Physik und Himmelsmechanik erinnern fühlen.

¹⁴Die von Gödel verwendete Begrifflichkeit ist nicht unproblematisch. In welchem konkreten Sinne die dargestellte Position zu recht *idealistisch* genannt werden sollte, darf diskutiert werden. Das Spannungsfeld erhöht sich noch dadurch, daß Gödel selbst in der Regel als *Realist* betrachtet wird; siehe z.B. [You05, S. 126f.].

kann, daß man mit Rückgriff auf die *kontingenten* Eigenschaften unseres Universums die Existenz der Zeit retten könne.¹⁵ Zwar äußert er sich nicht dazu, ob er eine nicht-idealistische Philosophie als Alternative noch für tragfähig hält,¹⁶ aber er sieht klar die Möglichkeit, die Existenz der Zeit durch tieferliegende physikalische Prinzipien zu garantieren.

Solche Prinzipien aufzusuchen ist die philosophische Herausforderung, die uns Gödel hinterlassen hat.

Literatur

- [Ein05] Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik und Chemie*, 17:891–921, 1905.
- [Ein16] Albert Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, 1916.
- [Gö30] Kurt Gödel. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37:349–360, 1930.
- [Gö31] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198, 1931.
- [Gö33] Kurt Gödel. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4:34–38, 1933.
- [Gö38] Kurt Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 24:556–557, 1938.
- [Gö49a] Kurt Gödel. An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein’s Field Equations of Gravitation. *Reviews of Modern Physics*, 21(3):447–450, 1949.
- [Gö49b] Kurt Gödel. A remark about the relationship between relativity theory and idealistic philosophy. In P. A. Schilpp, editor, *Albert Einstein, Philosopher–Scientist*, pages 555–562. Harper & Row, 1949.
- [Gö56] Kurt Gödel. Eine Bemerkung über die Beziehungen zwischen der Relativitätstheorie und der idealistischen Philosophie. In P. A. Schilpp, editor, *Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher*, pages 406–412. Kohlhammer, 1956. Übersetzung von [Gö49b] mit wichtigen Zusätzen in zwei Fußnoten.
- [Gö58] Kurt Gödel. Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. *Dialectica*, 12:280–287, 1958.
- [Gö95] Kurt Gödel. Some observations about the relationship between theory of relativity and kantian philosophy. In S. Feferman et al., editors, *Kurt Gödel – Collected Works*, volume III, pages 230–259. Oxford University Press, 1995. Entwürfe aus Gödels Nachlaß für den Artikel [Gö49b].
- [Haw92] S. W. Hawking. Chronology protection conjecture. *Physical Review D*, 46:603–611, 1992.

¹⁵Einen solchen Rettungsversuch schreibt er explizit James Jeans in [Jea35] zu, [Gö56, S. 408].

¹⁶Howard Stein [Ste90] bedauert ausdrücklich das Fehlen von mehr Material, das Aufklärung über die philosophische Position Gödels, gerade gegenüber Kant, liefern würde in seiner Einleitung zum Nachdruck des Artikels [Gö49b]. Wir haben wenigstens ausführlichere Entwürfe zu diesem Artikel, bei denen im Titel „idealistic philosophy“ durch „Kantian philosophy“ ersetzt war und die auf 1946–49 datiert werden [Gö95].

- [Hil18] David Hilbert. Axiomatisches Denken. *Mathematische Annalen*, 78(3/4):405–415, 1918. Vortrag vom 11. September 1917 gehalten vor der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft.
- [Jea35] James Jeans. Man and the Universe. Sir Halley Steward Lecture, S. 22–23, 1935.
- [Mor02] Oskar Morgenstern. Brief an Bruno Kreisky. In E. Köhler et al., editors, *Kurt Gödel – Wahrheit und Beweisbarkeit*, volume I: Dokumente und historische Analysen, pages 23–24. öbv & hpt, 2002.
- [NMAA10] István Németi, Judit Madarász, Hajnal Andréka, and Attila Andai. Visualizing some ideas about Gödel-type rotating universes. In M. Scherfner and M. Plaue, editors, *Gödel-type Spacetimes: History and New Developments*, volume X of *Collegium Logicum*, pages 77–127. Kurt Gödel Society, 12 2010.
- [Rei70] Constance Reid. *Hilbert*. Springer, 1970.
- [Ste90] Howard Stein. Introduction note to *1949a*. In S. Feferman et al., editors, *Kurt Gödel – Collected Works*, volume II, pages 199–201. Oxford University Press, 1990. „1949a“ ist der Artikel [Gö49b].
- [You02] Palle Yourgrau. Philosophische Betrachtungen zu Gödels Kosmologie. In B. Buldt et al., editors, *Kurt Gödel – Wahrheit und Beweisbarkeit*, volume II: Kompendium zum Werk, pages 269–288. öbv & hpt, 2002.
- [You05] Palle Yourgrau. *Gödel, Einstein und die Folgen*. C. H. Beck, 2005.